



Tipo de actividad: Asignatura(MAT501)

Nombre: Teoría de la medida e integración.

Requisitos: MAT404

Créditos: 5

Intensidad Horaria: 4 Horas semanales.

Correquisitos:

## Introducción

Este curso está dirigido principalmente a los estudiantes de los programas de Matemáticas y Licenciatura en matemáticas.

Este es un curso avanzado en la línea de análisis real - teoría de las funciones. En su primera parte, se desarrollan importantes aspectos de la teoría de la medida de Lebesgue en la recta real, tales como la posibilidad de medir conjuntos numéricos abiertos, cerrados y acotados, propiedades generales de la clase de conjuntos medibles, el teorema de Vitali. Igualmente se aborda la teoría  $n$  dimensional de la medida y los conjuntos medibles no acotados. También se considera la existencia de conjuntos no medibles y el problema de la medida a que ello conlleva.

La segunda parte del curso se dedica a la teoría de las funciones medibles en el sentido de Lebesgue, sus principales características y relaciones con clases de funciones conocidas en los cursos de cálculo, tales como las funciones continuas y las sucesiones funcionales. Del estudiante se requieren conocimientos sólidos de los cursos de cálculo diferencial e integral, y en particular, de los conceptos de supremo, límite y continuidad.

## Objetivo General

Estudiar rigurosamente los conceptos y métodos fundamentales de la teoría de la medición (según Lebesgue) en la recta real y en el espacio euclideo  $n$  dimensional, identificando las características principales de las funciones medibles.

## Objetivos específicos

1. Fomentar el estudio del análisis y de la teoría de funciones
2. Estudiar un desarrollo riguroso y sistematizado de los fundamentos de la teoría de la medida de Lebesgue.
3. Estudiar los principales métodos y propiedades de las funciones medibles en el sentido de Lebesgue.

## Contenido

### CAPÍTULO I. CONJUNTOS MEDIBLES

- 1.1. Medida de un conjunto abierto y acotado
- 1.2. Medida de un conjunto cerrado y acotado
- 1.3. Medidas interna y externa de un conjunto acotado
- 1.4. Conjuntos medibles
- 1.5. Medición y medida como invariantes del movimiento
- 1.6. Clase de conjuntos medibles
- 1.7. Consideraciones generales sobre el problema de la medida
- 1.8. Teorema de Vitali

### CAPÍTULO II. FUNCIONES MEDIBLES

- 2.1. Funciones medibles y sus propiedades elementales

- 2.2. Otras propiedades de las funciones medibles
- 2.3. Sucesiones de funciones medibles. Convergencia en medida
- 2.4. Estructura de las funciones medibles
- 2.5. Teorema de Weierstrass (opcional)

### CAPÍTULO III. CONJUNTOS MEDIBLES N DIMENSIONALES

- 3.1. Teoría de la medida en el plano
- 3.2. Medición y medida como invariantes del movimiento
- 3.3. Relación entre la medida de un conjunto plano y las medidas de sus cortes
- 3.4. Funciones medibles de varias variables
- 3.5. Medida de conjuntos no acotados
- 3.6. Funciones medibles de dominio no acotado

### CAPITULO IV. INTEGRAL DE LEBESGUE DE UNA FUNCION ACOTADA

- 4.1. Concepto de la integral de Lebesgue
- 4.2. Propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue
- 4.3. Paso al límite bajo el símbolo de integración
- 4.4. Comparación de las integrales de Riemann y Lebesgue
- 4.5. Restitución de la primitiva de una función

### CAPITULO V. FUNCIONES SUMABLES

- 5.1. Integral de una función acotada y no negativa
- 5.2. Funciones sumables (integrables) de signo variable
- 5.3. Paso al límite bajo el símbolo de integración

### CAPÍTULO VI. FUNCIONES ABSOLUTAMENTE CONTINUAS. INTEGRAL INDEFINIDA DE LEBESGUE

- 6.1. Funciones absolutamente continuas y sus propiedades elementales
- 6.2. Propiedades diferenciales de las funciones absolutamente continuas
- 6.3. Integral de Lebesgue impropia
- 6.4. Cambio de variable en la integral de Lebesgue
- 6.5. Restitución de la primitiva de una función

## Bibliografía

1. Real Analysis. Royden H.L. Second edition Macmillan publishing co., inc.1968 (part one 1-4)
2. Análisis real. Medida e integración. Piotr Lavréntevich Uliánov, Mijail Ivánovich Diáchenko MGU. Adison Wesley, Madrid, 2000
3. Teoría de la medida Jesús María Rios Aliaga 17.04.02
4. Teoría de las funciones de variable real. Natanson I. P. Segunda edición. Editorial Nauka. Moscú. 1957
5. Teoría de la integración. Guillermo Restrepo. Programa Editorial Universidad del Valle. 2004
6. Medidas radonianas. Guillermo Resptrepo. Editorial ULC. 2004.
7. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Kolmogorov A:N: , Fomin. Editorial MIR, Moscú. 1972.
8. Problemas y ejercicios del análisis matemático. B. P: Demidovich. Editorial MIR, Moscú. 1985