Universidad del Cauca

Facultad de Ciencias Naturales, Exactas y de la Educación

Departamento de Matemáticas

Tipo de actividad: Asignatura(MAT406)	Créditos: 4
Nombre: Análisis III.	Intensidad Horaria: 4 Horas semanales.
Requisitos: MAT405	Correquisitos:

Introducción

La teoría de integración de Lebesgue es resultado del esfuerzo de hacer frente a los problemas no resueltos que habían surgido a partir de la anterior teoría de integración Riemman, la cual era suficiente para abordar la mayoría de los problemas de Cálculo, pero tenía limitaciones para abordar problemas provenientes del análisis matemático y del estudio analítico de ecuaciones diferenciales. La matemática moderna se escribe en términos de la integral de Lebesgue y de espacios funcionales definidos a partir de ella, lo que hace indispensable incluir un curso de Integración de Lebesgue en el plan obligatorio de asignaturas de un matemático.

El presente curso consta de dos partes bien diferenciadas. Inicialmente se construye la medida de Lebesgue y se define la integración de Lebesgue en la recta real, analizando sus principales conceptos, haciendo énfasis en el concepto de funciones medibles y estableciendo una comparación con la integral de Riemman, ya conocida a partir de los cursos básicos de Cálculo. Posteriormente, en la segunda parte del curso, los conceptos usados para definir la integral de Lebesgue para funciones de variable y valor real son generalizados a funciones definidas en un espacio abstracto y se lleva este concepto a funciones definidas en productos de espacios, estudiando los importantes de Teoremas de Fubini y Tonelli y obteniendo a partir de esta generalización la construcción y principales propiedades de la medida e integral de Lebesgue en el espacio euclideo n-dimensional.

Objetivo General

• Estudiar rigurosamente los conceptos y métodos fundamentales de la teoría de la medida e Integración de Lebesgue en la recta real y en el espacio euclideo n dimensional, identificando las características principales de las funciones medibles.

Objetivos especificos

• Fomentar el estudio del análisis y de la teoría de funciones.
• Estudiar un desarrollo riguroso y sistematizado de los fundamentos de la teoría de la medida de Lebesgue.
• Estudiar los principales métodos y propiedades de las funciones medibles en el sentido de Lebesgue.
• Establecer las diferencias principales entre la integral de Riemman y la integral de Lebesgue, reconociendo las limitaciones que dan origen a la necesidad de una generalización de la primera de estas integrales.

Contenido

PARTE I. INTEGRAL DE LEBESGUE PARA FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL.

CAPITULO 1. MEDIDA DE LEBESGUE.
1.1 Medida exterior.
1.2 Conjuntos Lebesgue medibles.
1.3 Propiedades de los conjuntos Lebesgue medibles.

1.4 Aditividad y continuidad de la medida de Lebesgue.
1.5 Concepto de “casi toda parte”.
1.6 Lema de Borel-Cantelli.

CAPITULO 2. FUNCIONES LEBESGUE MEDIBLES.
2.1 Funciones medibles.
2.2 Sumas, productos y composición de funciones medibles.
2.3 Convergencia puntual de funciones.
2.4 Aproximación por funciones simples.

CAPITULO 3. INTEGRACIÓN DE LEBESGUE.
3.1. Integral de una función simple.
3.2. Integral de una función acotada sobre un conjunto de medida finita.
3.3. Integral de funciones medibles no negativas.
3.4. Teorema de convergencia monótona.
3.5. Integral de Lebesgue de una función general.
3.6. Propiedades de la integral de Lebesgue.
3.7. Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
3.8. Teorema de convergencia de Vitali.
3.9. Comparación entre la integral de Riemann y la integral de Lebesgue.
3.10. El espacio vectorial normado de funciones integrables.

PARTE II. TEORÍA GENERAL DE INTEGRACIÓN DE LEBESGUE.

CAPITULO 4. CONSTRUCCIÓN DE MEDIDAS.
4.1. Medidas y conjuntos medibles.
4.2. La medida de Caratheodory inducida por una medida exterior.
4.3. Construcción de medidas exteriores.
4.4. Extensión de una pre-medida a una medida.

CAPITULO 5. INTEGRACIÓN SOBRE UN ESPACIO DE MEDIDA.
5.1. Funciones medibles.
5.2. Integración de funciones no negativas.
5.3. Integración de funciones generales.
5.4. Teoremas de paso al límite bajo el signo integral.
5.5. El espacio vectorial normado de funciones integrables.

CAPITULO 6. MEDIDAS PRODUCTO.
6.1. Medidas producto.
6.2. Los Teoremas de Fubini y Tonelli.
6.3. La medida e integral de Lebesgue en el espacio euclideo n-dimensional.

Bibliografía

• Texto guía H. L. Royden, Patrick Fitzpatrick. Real Analysis, 3rd edition. Prentice Hall, 2010.
• Robert G. Bartle. The Elements of Integration. John Wiley and Sons, 1966.
• I. P. Natanson. Teoría de las funciones de variable real. 2a edición. Editorial Nauka, 1957.

• Marek Capinski, P. E. Kopp. Measure, integral and probability, 2nd edition. Springer, 2003.
• Inder K. Rana. An introduction to measure and integration, 2nd edition. American mathematical Society, 2002.