



Tipo de actividad: Asignatura(MAT507)

Nombre: Espacios  $L_p$  .

Requisitos: MAT501

Créditos: 5

Intensidad Horaria: 4 Horas semanales.

Correquisitos:

## Introducción

Este curso está dirigido principalmente a los estudiantes de los programas de Matemáticas y Licenciatura en matemáticas.

Este es un curso avanzado en la línea de análisis real - teoría de las funciones. En los preliminares, se exponen importantes aspectos de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue. El segundo capítulo se dedica al concepto de supremo esencial ( $\sup_{\text{vrai}}$ ) y la desigualdad de Holder, prestando especial atención a la exactitud de esta desigualdad, toda vez que este hecho se relaciona con la no existencia de funcionales lineales en algunos espacios  $L_p$ . En el tercer capítulo se exponen algunas aplicaciones de la desigualdad de Holder, incluyendo la desigualdad de Minkowsky. La completitud de los espacios  $L_p$  es estudiada en el capítulo cuarto., y en el quinto se presenta la desigualdad generalizada de Minkowsky. El capítulo opcional se dedicaría a la desigualdad de Hardy.

## Objetivo General

1. Estudiar rigurosamente las características principales de los espacios de funciones sumables según Lebesgue, identificándolos como un modelo clásico de los espacios de Banach.
2. Identificar las principales desigualdades integrales que tienen lugar en los espacios  $L_p$ .

## Objetivos específicos

1. Fomentar el estudio del análisis y de la teoría de funciones .
2. Estudiar los principales métodos y propiedades de las funciones Lebesgue sumables
3. Estudiar la exactitud de la desigualdad clásica de Holder y su relación con la existencia de funcionales lineales en  $L_p$ .
4. Distinguir ciertos tipos de convergencia en los espacios  $L_p$ , y su relación con la convergencia clásica.

## Contenido

### CAPÍTULO I PRELIMINARES (Integral de Lebesgue)

- 1.1 Funciones medibles según Lebesgue
- 1.2 Integrabilidad de funciones escalonadas
- 1.3 Integral de Lebesgue para funciones medibles
- 1.4 Propiedades de la integral de Lebesgue
- 1.5 Comparación de las integrales de Lebesgue y Riemann
- 1.6 Paso al límite en la integral de Lebesgue (teorema de Fatou y Bepo Levi)
- 1.7 Desigualdad de Chevishev y criterio de nulidad de la integral de Lebesgue

### CAPÍTULO II ESPACIOS $L_p$

- 2.1 Definiciones y propiedades fundamentales
- 2.2 Supremo esencial. Funciones esencialmente acotadas
- 2.3 Desigualdad de Holder y sus aplicaciones
- 2.4 Exactitud de la desigualdad de Holder
- 2.5 Sobre la no existencia de funcionales lineales y no triviales en  $L_p$ , para  $0 < p < 1$

### CAPÍTULO III ALGUNAS APLICACIONES Y GENERALIZACIONES DE LA DESIGUALDAD DE HOLDER

- 3.1 Teorema de inclusión para distintos valores del parámetro  $p$
- 3.2 Desigualdad multiplicativa
- 3.3 Desigualdad discreta de Holder
- 3.4 Desigualdad de Minkowsky

### CAPÍTULO IV CONVERGENCIA EN $L_p$

- 4.1 Convergencia uniforme y convergencia en casi todas partes
- 4.2 Completitud de los espacios  $L_p$

### CAPÍTULO V DESIGUALDAD GENERALIZADA DE MINKOWSKY

- 5.1 Desigualdad generalizada de Minkowsky para series funcionales
- 5.2 Desigualdad generalizada de Minkowsky para integrales

### CAPÍTULO VI DESIGUALDAD DE HARDY (OPCIONAL)

## Bibliografía

1. Real Analysis. Royden H.L. Second edition Macmillan publishing co., inc.1968 (part one 1-4)
2. Análisis real. Medida e integración. Piotr Lavréntevich Uliánov, Mijail Ivánovich Diáchenko MGU. Adison Wesley, Madrid, 2000
3. Teoría de la medida Jesús María Rios Aliaga 17.04.02
4. Teoría de las funciones de variable real. Natanson I. P. Segunda edición. Editorial Nauka. Moscú. 1957
5. Teoría de la integración. Guillermo Restrepo. Programa Editorial Universidad del Valle. 2004
6. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Kolmogorov A:N: , Fomin. Editorial MIR, Moscú. 1972.
7. Espacios Funcionales. Espacios  $L_p$ . Burenkov V. I. Editorial UDN, Moscú, 1980
8. Espacios Funcionales. Desigualdades integrables fundamentales, relacionadas con los Espacios  $L_p$ . Burenkov V. I. Editorial UDN, Moscú, 1980
9. Problemas y ejercicios del análisis matemático. B. P: Demidovich. Editorial MIR, Moscú. 1985.